標準物質協議会

会報

２０２２・３
第　９１号

Japan Association of Reference Materials

目 次

１．不確かさ評価ノート　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・1
２．最近のトピックスから・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・13
３．編集後記・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・14

不確かさ評価ノート
（「計測標準と計量管理」誌）

標準物質協議会　事務局

不確かさ評価ノートは、一般社団法人日本計量振興協会が発行する「計測標準と計量管理」誌から許可を得て転載したものです。今回は、不確かさ評価ノートシリーズとして執筆された田中秀幸様のご担当部分の中から第 1 回（Vol.67,No.2,2017）、第２回（Vol.67,No.3, 2017）、第 5 回（Vol.68,No.2,2018）、第 7 回（Vol.68,No.4,2019）を掲載します。

論文の内容を変更せずに標準物質協議会の会報用に編集して掲載したものです。ただし、執筆者のご所属を現在の所属に変更し、参考文献の GUM を現在の状態に変更しています。転載をご許可くださいました一般社団法人日本計量振興協会及び執筆者の田中秀幸様に感謝申し上げます。

不確かさ評価ノート　第１回

タイプ A 評価における相関の取り扱いについて

国立研究開発法人 産業技術総合研究所 計量標準総合センター
工学計測標準研究部門　データサイエンス研究グループ
研究グループ長　田　中　秀　幸

１　はじめに

近年不確かさ評価が一般にも広まりつつあるが、やはりなかなか理解が難しい、との話をよく聞く。そこで読者の不確かさ理解のための一助として、シリーズ解説「不確かさ評価ノート」を今回から不定期・不定著者にて連載する。

第１回の本稿は、タイプ A 評価における相関の取り扱いについて解説する。不確かさ評価において相関の取り扱いは一般に混乱を招いており、当方にもよく相談が寄せられる。よってまずタイプA評価においての相関について解説し、タイプ A 評価においては相関をほとんど考慮する必要がないことを紹介する。

２　一般的な相関の取り扱いについて

入力量同士が相関を持つ場合、不確かさを合成する際にその相関を考慮し合成を行う必要がある。そのとき GUM5.2.2 に従い相関を考慮した不確かさの伝播則を用いなければならない。式(1)に相関を考慮した不確かさの伝播則を示す。

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j) \tag{1}$$

ここで、

y　　出力量の値

x_i　　各入力量の値

$u_c(y)$　　合成標準不確かさ

$u(x_i)$　　各入力量の標準不確かさ

$\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)$　　各入力量の感度係数

$r(x_i,x_j)$　入力量 x_i, x_j間の相関係数の推定値

である。

つまり、入力量間に相関が存在する場合は、その入力量間の相関係数の推定値を求め、それを式(1)に代入することによって合成標準不確かさを求める必要がある。

３　タイプ A 評価における相関の取り扱いについて

タイプ A 評価を行った際に入力量間の相関を考慮しなくてはならない場合は、複数の入力量を同時測定している場合である。もし同時測定を行っていない場合では、各入力量は別の機会に測定されていることとなり、外乱等が影響し値が変動するのであれば、その外乱が同時に入力量に影響を与えることはなく、相関を考える必要はないはずである。ではここで相関を考える必要がある測定、例えば次のような測定を考える。

例：測定の数学モデル

$$z=\frac{x}{y} \tag{2}$$

このとき、x、y は同時に測定されているとし、10 回繰返し測定を行った測定結果を**表 1** に示す。

表 1：測定結果

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平　均	標準偏差
x	10.41	9.93	10.19	10.34	10.29	9.85	9.71	10.06	9.82	9.73	10.033	0.261
y	20.51	19.91	20.02	20.57	20.48	20.29	19.99	20.10	19.60	19.66	20.113	0.344
z	0.508	0.499	0.509	0.503	0.502	0.485	0.486	0.500	0.501	0.495	0.499	0.008029

このように同時測定を行っている場合は、相関を疑う必要がある。ここで、表 1 で示される測定結果に対し、入力量の相関係数の推定値を求めると、

$$r(x,y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=0.797 \tag{3}$$

となる。相関係数は-1 から 1 の範囲に存在する値で、0 に近ければ相関は存在せず、-1、1 に近づけば相関が強いことを表している。

この測定の場合相関係数が 0.8 近くあり、入力量の間に相関が認められるのが分かる。よって、不確かさを評価する場合には相関を考慮した不確かさの伝播則を適用する必要がある。出力量の値 z の不確かさ（合成標準不確かさ）を求めると、

$$\begin{aligned}
u_c^2(z)&=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2u^2(x)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2u^2(y)+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)u(x)u(y)r(x,y)}\\
&=\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2u^2(x)+\left(-\frac{x}{y^2}\right)^2u^2(y)+2\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)u(x)u(y)r(x,y)}\\
&=\sqrt{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{20.113}\right)^2\left(\frac{0.261}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(-\frac{10.033}{20.113^2}\right)^2\left(\frac{0.344}{\sqrt{10}}\right)^2\\+2\left(\frac{1}{20.113}\right)\left(-\frac{10.033}{20.113^2}\right)\left(\frac{0.261}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{0.344}{\sqrt{10}}\right)0.797\end{array}}\\
&=0.002546
\end{aligned} \tag{4}$$

となる。

しかし、実は上記のような評価を行う必要はなく、もっと簡単に合成標準不確かさを求めることができる。その方法は、入力量の標準不確かさを不確かさの伝播則によって求めるのではなく、そもそも出力量の値を繰返し測定結果としてその標準偏差を求めればよい。つまり、表 1 の 1 番下の行に注目すればよい。表 1 より、z の標準偏差は、0.008029 であるので、出力量の繰返しの標準不確かさは、それを繰返し回数の平方根で割ればよい。よって、

$$u_{\mathrm{c}}(z)=\frac{0.008029}{\sqrt{10}}=0.002539 \tag{5}$$

となる。式(5)の値は、式(4)の値と非常に近いことが分かるだろう。つまりタイプ A 評価の場合、そもそも相関を考える必要はなく、出力量の繰返しと考えて、その標準偏差を求めればよい。また、式(4)と式(5)の値は若干異なるが、どちらの方が正しい不確かさ評価ができているかというと、式(5)のほうである。なぜなら、式(4)のほうは、不確かさの伝播則を用いて合成しているため、測定の数学モデルを直線近似している部分があるが、式(5)では近似は入っていない。よって式(5)のほうが厳密な評価ができている。

このように通常のタイプ A 評価の場合では、出力量の繰返しと考えることによって、相関を考慮する必要はなくなり、さらにより正しい不確かさ評価ができる。このことは GUM4.1.4 注

記、附属書 H.2、附属書 H.4 にも記載されている。

4　おわりに

今回はタイプ A 評価における相関の取り扱いについて解説した。タイプ A 評価の場合は、出力量の繰返しと考えれば相関を考慮する必要がなくなることが理解できたかと思う。

今後の連載では今回の内容のような不確かさ評価を行う際のコツなどを紹介していきたいと考えている。

参考文献

編集委員長　今井秀孝、測定における不確かさの表現のガイド[GUM]ハンドブック、日本規格協会、2018.

不確かさ評価ノート　第 2 回

タイプ B 評価における相関の取り扱いについて

国立研究開発法人 産業技術総合研究所 計量標準総合センター
工学計測標準研究部門　データサイエンス研究グループ
研究グループ長　田　中　秀　幸

1　はじめに

前回の不確かさ評価ノート第 1 回は、特に多くの疑問が寄せられる相関について解説した。第 2 回も前回に引き続き相関の解説を行う。ただし、第 1 回とは異なり、タイプ B 評価における相関の取り扱いについて解説する。タイプ A 評価においてはほとんどの場合相関を考慮する必要はないが、タイプ B 評価では、非常に多くのところで相関を取り扱う必要がある。今回はタイプ B の不確かさ評価において相関を考慮する必要がある場合について解説する。

2　相関を持つ場合の不確かさの合成法について

入力量が相関を持つ場合、式(1)で示した相関を考慮した不確かさの伝播則を用いて各標準不確かさを合成する。

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j) \tag{1}$$

また、入力量が相関を持つ場合とは、外乱等の影響が入力量に同時に影響するようなときであり、そのようなときには入力量の値が同時に大きくなる、小さくなる、もしくは片方が大きくなる時にはもう片方が小さくなるということが起きる。相関を持つ場合には式(1)の第 2 項にある相関係数を別途算出し、それを用いて不確かさを合成する必要がある。

3　タイプ B 評価における相関の取り扱いについて

タイプ B 評価において相関を考慮しなければならない典型例は、用いている標準器の校正の不確かさである。ただし、単に一つの標準器を用いている場合は通常相関を考慮する必要はな

い。相関を考慮しなければならないのは、複数の標準器を同時に使用する場合である。

複数の標準器を同時に使用する例をいくつか挙げると、

- 天秤を校正する際、2 kg の校正点を 1 kg の標準分銅を 2 個用いて校正する場合。
- 500 Ω の抵抗を校正する際、100 Ω の標準抵抗を 5 個直列に接続し校正する場合。
- 大流量を測定できる流量計を校正する際、流路を 2 つに分岐し、流路それぞれに小型の標準流量計を取り付け校正する場合。

等がある。

このように複数の標準器を用いる場合にはその標準器の値の間に相関が存在すると考える必要がある。なぜなら、標準器を同時に用いているため、例えば標準器の値が増加するほうへずれるような外乱が影響を与えてきたとき、その外乱は標準器両方の値を増加させるであろう。そうすると、標準器の値のずれは同じ方向、すなわち相関が存在すると考えられる。

また、外乱でなくとも同時に用いる標準器は通常同一の上位標準器によって校正されているだろう。例えば、用いている複数の分銅が上位のある一つの標準分銅によって校正されている場合、上位の標準分銅の質量は完全に校正証明書に記載された値と一致しているわけではなく、不確かさの範囲内では何らかのかたよりを持っていることが考えられる。そうすると、そのようなかたよりを持った上位の標準分銅によって校正された複数の分銅もまたそのかたよりは受け継がれ、同じ方向に質量がかたよっていることが考えられる。

次の問題は、相関が存在することは理解できるが、その相関の大きさ、つまり相関係数をどのようにして求めたらよいのか、ということである。タイプ A 評価の場合では、繰返し測定データが存在し、公式に基づいて相関係数を算出すれば問題ないが、タイプ B 評価の場合、測定データがそもそも存在せず、校正証明書に記載された値とその不確かさしか知ることができない。よって、何らかの方法で相関係数を推定する必要がある。

では相関係数の推定であるが、先ほども触れたようにデータから評価することは無理であるので、状況を推察して相関係数を決定するしか方法はない。では状況を考えると、同じ外乱により、同様の状況下に置かれている標準器に対して値を変動させる、または、同じ上位標準器によって標準器が校正される、ということを考えると、非常に強い相関があることが予想される。そうであれば若干過大評価ではあるだろうが、完全相関（相関係数が 1）と考えてもそう問題はないだろう。

相関係数が 1 のときに式(1)がどのような形になるかを考える。式(1)は入力量の個数が N 個のときであるので、最も簡単な入力量の個数が 2 個のときを考える。式(1)に、N=2、r=1 を代入した結果を式(2)に示す。

$$
\begin{aligned}
u_c^2(y) &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + 2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) u(x_1)u(x_2) \\
&= \left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)u(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)u(x_2)\right\}^2 \\
u_c(y) &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)u(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)u(x_2)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式(2)を見ると、相関係数が 1 のときには、不確かさの合成を二乗和の平方根で行うのではなく、単純和で行う、ということが分かるだろう。これは入力量が 2 個の場合だけでなく、一般的に成立し、

$$
\begin{aligned}
u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)u(x_i)u(x_j) \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)u(x_i)\right\}^2 \\
u_c(y) &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)u(x_i)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となる。すなわち複数の標準器を用いた場合、標準器の校正の不確かさは各標準器の校正の不確かさを単に足し算して求める必要がある。

実際に相関係数を 1 と考えたほうがリーズナブルな例を紹介する。例えば、1 kg の分銅があり、その合成標準不確かさが 1 g であったとしよう。この場合、相対合成標準不確かさを考えると、質量が 1000 g、合成標準不確かさが 1 g であるので、0.1 %となる。次にこの分銅を 2 つ用意し、2 kg を校正することを考える。そのとき相関を考慮せずに校正の不確かさを合成すると、

$$u_c(y) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.4\ \mathrm{g} \tag{4}$$

となる。このとき相対合成標準不確かさを求めると、分銅が 2 個あるので、質量は 2 kg、合成標準不確かさが 1.4 g であるので、0.07 %程度となってしまう。つまり、1 つの分銅の場合相対標準不確かさは 0.1 %であるのにもかかわらず、分銅を 2 つにすると 0.07 %となり、不確かさの相対値が減少する。これはおかしいだろう。しかし相関を 1 と考えると、合成標準不確かさは、

$$u_c(y) = 1 + 1 = 2\ \mathrm{g} \tag{5}$$

となり、相対合成標準不確かさを考えると、2 kg の質量に対し、合成標準不確かさが 2 g であるので、相対合成標準不確かさは 0.1 %となり、分銅 1 つのときと変わらない。よって、こちらのほうが正しい扱いであることがわかるだろう。

4　おわりに

今回はタイプ B 評価における相関の取り扱いについて解説した。タイプ B 評価の場合は、複数の標準器を用いた場合の標準器の校正の不確かさを評価する際に相関を考える必要があり、その合成法は単純に足し算すればよい。このことは GUM の 5.2.2 の例に記載されているので参照してほしい。

参考文献

編集委員長　今井秀孝、測定における不確かさの表現のガイド[GUM]ハンドブック、日本規格協会、2018.

不確かさ評価ノート　第 5 回

タイプ B 評価における確率分布割り当ての考え方

国立研究開発法人 産業技術総合研究所 計量標準総合センター
工学計測標準研究部門　データサイエンス研究グループ
研究グループ長　田　中　秀　幸

1　はじめに

不確かさ評価においてタイプ B 評価を適用するときには、対象となる量がどの確率分布に従うかを決定する必要がある。本稿では確率分布を選択する際にどのような原則に従えばよいかの指針を解説する。

2　タイプ B 評価で用いられる確率分布について

タイプ B 評価で用いられる確率分布で代表的なものは 4 つである。矩形分布、三角分布、U 字分布、正規分布である。それらの一覧を図 1 に示す。

上記の確率分布で矩形分布、三角分布、U 字分布はそれぞれ±a の範囲内に値が存在するときに用いられるが、正規分布だけは異なり、すでに標準偏差が分かっているときに適用する。

標準偏差が分かっているとき、という場合で最も典型的な例は、校正証明書から測定器の校正の不確かさ引用するときである。校正証明書には校正結果とその拡張不確かさが記載されており、ほとんどの場合拡張不確かさの包含係数は k=2 が採用されているであろう。これは校正結果の確率分布が正規分布であり、合成標準不確かさを 2 倍することにより、95%包含区間の半幅を表す拡張不確かさが示されているということを意味する。よって、すでに不確かさが分かっているとき、という特殊ケースであるので、次節以降では他の 3 つの分布をどのような考えで採用すればよいのかを解説する。

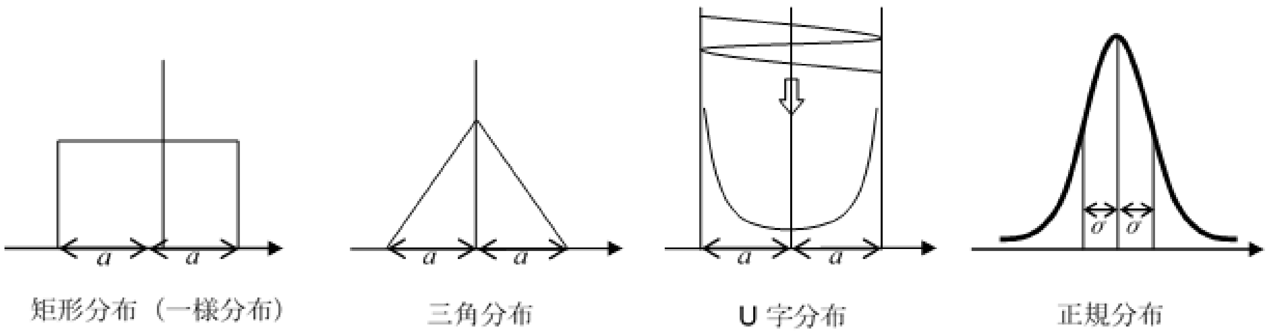

図１：タイプ B 評価で用いられる確率分布

３　矩形分布、三角分布、U 字分布の採用指針

矩形分布、三角分布、U 字分布は、それぞれ±a の範囲に値が存在しているときに採用することができる。つまりタイプ B 評価を行う際には、その対象とする量の値の存在範囲を何らかの情報から知ることが重要である。そして、その存在範囲が分かれば、存在範囲の範囲内でどのように値が分布しているかの形を考え、その分布に対応して、矩形分布、三角分布、U 字分布を選択すればよい。

矩形分布を選択するときは、値が範囲内で同じ確率で表れるときであり、三角分布を選択するときは、中心の確率が高く、端に行くほど確率が低くなるようなときであり、U 字分布を選択するときは、分布の中心で確率が低く、端に行くほど確率が高くなるようなときである。

ではそれぞれの分布を適用する典型例を見てみよう。

矩形分布を適用できる典型的な不確かさ要因は、デジタル表示の不確かさである。例えばデジタル温度計に 23 ℃と表示されていたとき、これは表示分解能を考えると、22.5 ℃～23.5 ℃の範囲内に温度が存在している、ということを示している。また範囲内での値の存在確率を考えると、情報としてデジタル温度計の表示である、23 ℃というものしかない場合、これは 22.5 ℃～23.5 ℃の範囲内で同じ確率である、と考えてよいだろう。

三角分布を適用する典型例は、先ほどの説明のように値が三角分布に近い分布をしているので、三角分布を適用する、ということが勿論基本であるが、実際に三角分布が適用される事例として有名なのは、デジタルはかり（天秤）におけるデジタル表示の不確かさである。先ほど

矩形分布のときに解説したように、普通デジタル表示の不確かさは矩形分布を適用する。しかし、デジタルはかりは矩形分布ではなく三角分布を適用している例がほとんどである。なぜ三角分布を適用するかを図 2 で解説する。

デジタルはかりももちろん測定点でのデジタル表示の不確かさが存在する。図 2 では、10 g を測定したとき、最小表示桁が 1 g であれば、±0.5 g の範囲でどこに値が存在するか分からない。よって、先ほど矩形分布のところで解説したようなデジタル表示の不確かさが存在する。

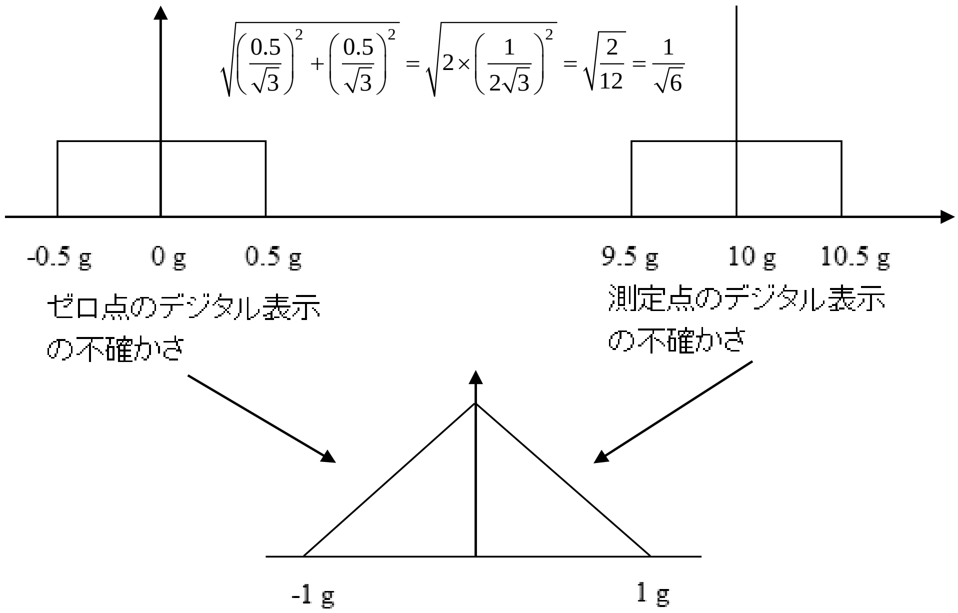

図 2：デジタルはかりのデジタル表示の不確かさ

しかし、デジタルはかりで考慮しなければならないデジタル表示の不確かさはこれだけではない。例えば、分銅における 0 g は、分銅が存在しないため確実に 0 g であるが、デジタルはかりの 0 g は分銅とは異なる。なぜなら、はかりの皿の上に何も載っていないときに 0 g と表示しているだけであり、絶対的な 0 を示すものではないからである。つまりデジタルはかりにおいては、0 点にもデジタル表示の不確かさが存在する。0 g と表示していても、-0.5 g〜0.5 g の範囲で 0 点も不確かなのである。よって、デジタルはかりのデジタル表示の不確かさは、0 点と測定点の 2 つが存在する。

これで不確かさ評価を行う際に、0 点のデジタル表示の不確かさと測定点のデジタル表示の不確かさを別個に求め、それを合成しても全く問題はないが、デジタルはかりの不確かさ評価事例をいろいろ見ると、はかりのデジタル表示の不確かさを先に合成し、一つの要因として評価しているものが多い。

デジタル表示の不確かさを先に合成するというのは、0 点におけるデジタル表示の不確かさと測定点におけるデジタル表示の不確かさを合成するということを意味し、それは同じ大きさの矩形分布を 2 つ合成するということと同意である。

同じ大きさの矩形分布を 2 つ合成するとどのような分布となるか、ということであるが、それは幅が倍の三角分布となる。なぜ三角分布となるかは、サイコロを思い浮かべればよいだろう。サイコロは 1 から 6 までの目があり、それぞれの目が同じ確率で表れる。よって、離散的ではあるが、矩形分布のような分布をしていると考えられるだろう。そこで同じ大きさの矩形

分布を合成する、ということ考えると、同じさいころを2つ振ったときの出た目の和を考えればよい。その和の分布は、2 が出るのが(1、1)のときのみ、3が出るのが、(1、2)、(2、1)のとき、・・・、7 のときに一番数が多く、・・・、12 のときは(6、6)のときのみ、と考えると、幅が倍の三角分布になっていることが分かるであろう。よって、図2の下図のように、目幅を半幅に持つ三角分布を一つだけ考え、それをデジタルはかりのデジタル表示の不確かさとしているのである。

ただし、これは先ほど触れたように、0 点と測定点両方のデジタル表示の不確かさと考えてもよいし、三角分布を考えてもよい。どちらで考えたところで図2の数式に示すように、求められる標準不確かさの値は等しくなる。実際の不確かさ評価では、他の人が分かりやすいように選択してほしい。

最後にU字分布だが、これは、測定結果が± a の範囲内で正弦波のように変動しているときに選択する分布である。例えば、温度を 20 ℃ ±1 ℃でコントロールしたい場合、19 ℃が近づけばヒーターを入れ、21 ℃が近づけば、クーラーを入れるという制御を行った場合などに適用する。このように正弦波で変動すれば、20 ℃近辺はあっという間に通り過ぎるが、19 ℃、21 ℃の端に近いときは変動の方向が変わるので、ある程度の時間近辺で留まるために確率が高くなる、ということである。(図1、U字分布参照)

ただし、U字分布を適用している例は少なく、最もよく使われるのが高周波に関する測定のときである。インピーダンスマッチングという不確かさ要因で使われているらしい。

4　分布の形状が分からないときのタイプ B 評価について

３節にて紹介したのは、全て分布の形状が何らかの情報によって分かっているときに、それぞれの分布を適用する、ということであった。しかし実際の不確かさ評価においては、確率分布の形状が分かるときは少なく、値の存在範囲しか分からないときが非常に多い。例えば長期安定性の不確かさにおいて、カタログスペックから±1 %以内、ということが分かったとしても、通常カタログには、分布の形状まで書かれていることはほとんどない。そのような、値の存在範囲しか分かっていない場合にどのような確率分布を適用すればよいのかを説明する。

これについてはGUMに言及がある。

> 4.3.7　その他の場合として、X_iに対する限界（上限及び下限）だけを推定することが可能なケース、つまり、“X_iの値が a_-から a_+の区間にある確率が事実上1に等しく、また、X_iがこの区間の外にある確率が事実上ゼロである”というケースがある。区間内にある X_iのとり得る値について具体的な情報がない場合には、X_iが区間内のどこにでも同じ確率で存在する[一様分布又はく（矩）形分布—4.4.5 及び図 2a)参照]と仮定する。（後略）

つまり、限界値のみ分かっていて、分布の形状についての情報がない場合には、矩形分布を仮定する、ということである。よって、前節にて温度変動が正弦波のような波型の場合はU字分布を適用すると説明したが、温度の要因であっても、波型に変動しているという証拠がなく、どのような分布に従っているかどうかが分からない場合には矩形分布を適用する。

5　おわりに

今回はタイプB評価における分布の選択について解説した。限界値のみしか情報がない場合には矩形分布を適用してもよい、ということを解説した。ただし、本手法は若干あいまいなところがあることは否めない。GUM にもそのことは指摘されており、先ほど紹介した4.3.7の注記には以下のような記載がある。

> 4.3.7 注記　この方法で決定した不確かさのある成分が測定結果の不確かさに大きく寄与するときには、慎重を期して、その成分をさらに評価するための追加データを取るのが良い。

つまり、その不確かさ要因が主要因になるような場合にはもう少し他の評価手法を考えてみるなどしたほうが良いということである。矩形分布の設定は手軽ではあるが、非常な過大評価を招く場合も多々あるので、注意してほしい。

参考文献

編集委員長　今井秀孝、測定における不確かさの表現のガイド[GUM]ハンドブック、日本規格協会、2018.

不確かさ評価ノート　第7回

相対標準不確かさを用いた不確かさの合成について

国立研究開発法人 産業技術総合研究所 計量標準総合センター
工学計測標準研究部門　データサイエンス研究グループ
研究グループ長　田　中　秀　幸

1　はじめに

各標準不確かさを合成するときには、測定の数学的モデルに不確かさの伝播則を適用して行う。ただし、測定の数学的モデルが入力量の積・商のみで構成されているときには標準不確かさをその入力量の値で割った相対標準不確かさの二乗和しその平方根を計算することによって合成することができる（GUM[1]5.1.6）。その詳細、注意点、応用について紹介する。

2　相対標準不確かさを用いた不確かさの合成の根拠

相対標準不確かさの二乗和の平方根によって合成できるのはあくまでも測定の数学的モデルが入力量の積と商のみで構成されている場合である。このとき入力量の積と商のみで構成されている測定の数学的モデルを式(1)とすることができる。

$$y = c \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_i^{p_i} \cdots x_n^{p_n} \tag{1}$$

ここで、

y：出力量の値

x_i：i 番目の入力量の値

p_i：入力量のべき乗（例えば $p_i =$ −1 であれば x_i で割るということになる。また p_i には不確かさは存在しないまたは無視できるとする。）

c: 定数

とする。

式(1)に不確かさの伝播則を適用する。

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \tag{2}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x_i} &= \left(c \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_{i-1}^{p_{i-1}} \cdot x_{i+1}^{p_{i+1}} \cdots x_n^{p_n}\right) \cdot p_i x_i^{p_i - 1} \\
&= \left(c \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_{i-1}^{p_{i-1}} \cdot x_{i+1}^{p_{i+1}} \cdots x_n^{p_n}\right) \cdot p_i \, x_i^{p_i} \Big/ x_i \\
&= p_i \left(c \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_{i-1}^{p_{i-1}} \cdot x_i^{p_i} \cdot x_{i+1}^{p_{i+1}} \cdots x_n^{p_n}\right) \Big/ x_i \\
&= p_i \frac{y}{x_i}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

であるから、式(2)は、

$$
\begin{gathered}
u_{\mathrm{c}}^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \frac{y}{x_i}\right)^2 u^2(x_i) = y^2 \sum_{i=1}^{n} \left[p_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2 \\
\left[\frac{u_{\mathrm{c}}(y)}{y}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[p_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2
\end{gathered}
\tag{4}
$$

となる。特に入力量に対するべき乗 p_i が 1（つまり掛け算）若しくは−1（割り算）の場合は、相対標準不確かさの二乗和の平方根によって不確かさを合成し、相対合成標準不確かさが求められるということが分かるだろう。つまりこの式(4)を用いて相対合成標準不確かさが求められているのである。

３　相対標準不確かさの合成に関する注意点

この相対標準不確かさの合成で最もよく勘違いされているのは、どのような測定であっても相対標準不確かさにしてしまえば、二乗和の平方根で不確かさを合成できるという誤解である。つまり、測定の数学的モデルが入力量の積と商で表されていなくても式(4)を用いて相対合成標準不確かさを求めてしまうという誤りである。あくまでも相対合成標準不確かさを用いた合成が行えるのは、測定の数学的モデルが入力量の積と商で表されているときのみであり、それ以外のときには行えない。よって、測定の数学的モデルを最初に構築しなければ、不確かさの合成をどのように行えるか、ということは絶対に分からないということである。

例えば、コップに水を入れ、その質量 x を測定し、そこからコップの質量 m を引くことによって水の質量を求める、その後水の質量を水の密度 ρ で割ることによって水の体積 v を求めるという測定を考えたとすると、この測定の数学的モデルは、

$$
v = \frac{x - m}{\rho} \tag{5}
$$

となる。よって本測定の数学的モデルは積と商のみで表されていないため、

$$
\left[\frac{u_{\mathrm{c}}(v)}{v}\right]^2 = \left[\frac{u(x)}{x}\right]^2 + \left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(\rho)}{\rho}\right]^2 \tag{6}
$$

とするのは誤りである。ただし測定の数学的モデルを水の質量 y を用い書き換えたならば、

$$
\begin{gathered}
v = \frac{y}{\rho} \\
y = x - m
\end{gathered}
\tag{7}
$$

となり、この場合には、

$$
\begin{gathered}
\left[\frac{u_{\mathrm{c}}(v)}{v}\right]^2 = \left[\frac{u(y)}{y}\right]^2 + \left[\frac{u(\rho)}{\rho}\right]^2 \\
u(y) = \sqrt{u^2(x) + u^2(m)}
\end{gathered}
\tag{8}
$$

と考えることはできる。

４　相対標準不確かさを用いた不確かさの合成の応用

第 6 回の不確かさノートにて解説した誤差構造モデルを用いた測定の数学的モデルの構築法を先ほどの式(7)に適用することを考える。不確かさ要因として、人が異なることに起因するばらつき $\varepsilon_{\mathrm{opr}}$ と、測定場所が異なることに起因するばらつき $\varepsilon_{\mathrm{plc}}$ を導入すると式(7)は、

$$
v = \frac{y}{\rho} + \varepsilon_{\mathrm{opr}} + \varepsilon_{\mathrm{plc}} \tag{9}
$$

となる。しかしこうしてしまうと、測定の数学的モデルが積と商のみで構築されておらず、相

対標準不確かさを用いた合成ができなくなってしまう。よって、このようなときにはデータの誤差構造モデルを足し算で導入するのではなく、掛け算で導入する。つまり、

$$v = \frac{y}{\rho} \cdot \varepsilon_{\mathrm{opr}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{plc}} \tag{10}$$

ということである。式(9)の場合の各 ε は「値は 0 だが、不確かさは 0 でない」ものであった。式(10)の場合の各 ε は、「値は 1 であり、その 1 という値に不確かさが存在する」というものとなる。つまり、値は 1 であるので、測定結果 v には影響を与えない。さらにその 1 という値に対しての不確かさを考えると、それは「人が異なることに起因する相対標準不確かさ」、もしくは、「測定場所が異なることに起因する相対標準不確かさ」を表していることになる。

よって、相対標準不確かさを用いた不確かさの合成を行う式を適用すると、

$$\begin{aligned}\left[\frac{u_{\mathrm{c}}(v)}{v}\right]^2 &= \left[\frac{u(y)}{y}\right]^2 + \left[\frac{u(\rho)}{\rho}\right]^2 + \left[\frac{u(\varepsilon_{\mathrm{opr}})}{\varepsilon_{\mathrm{opr}}}\right]^2 + \left[\frac{u(\varepsilon_{\mathrm{plc}})}{\varepsilon_{\mathrm{plc}}}\right]^2 \\ &= \left[\frac{u(y)}{y}\right]^2 + \left[\frac{u(\rho)}{\rho}\right]^2 + u^2(\varepsilon_{\mathrm{opr}}) + u^2(\varepsilon_{\mathrm{plc}})\end{aligned} \tag{11}$$

となり、相対標準不確かさを用いた合成がそのまま行うことができる。

本手法は、参考文献[2)]（日本語版 : 参考文献[3)]でも紹介されており、化学分野でよく用いられている。

5　おわりに

今回は相対標準不確かさを用いた不確かさの合成について紹介した。しかし、この方法は上記で紹介した問題点以外に、相対標準不確かさを用いることによって、測定値（入出力量の値）が見えなくなってしまう、という問題もある。不確かさを相対値として表したせいで、どの値に対する相対値なのか、ということが分かりにくくなり、本来適用することができないような値に対する相対値を用いてしまうこともある。

本手法は偏微分を行わないということで初心者にも使いやすいと考えられているが、実際考慮すべきことは多くあり、初心者が偏微分を用いた不確かさの伝播則を理解する前に本手法を適用すると間違えることも多いので、十分注意してほしい。

参考文献

1) 編集委員長　今井秀孝、測定における不確かさの表現のガイド[GUM]ハンドブック、日本規格協会、2018.

2) EURACHEM / CITAC Guide CG 4 Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement 3rd Edition、Eurachem, 2012.

3) 日本分析化学会　監訳、米沢仲四郎　訳、分析値の不確かさ　求め方と評価，丸善出版，2013.

最近のトピックスから

一般財団法人化学物質評価研究機構
四角目 和広

１．キログラム原器の重要文化財指定

2019 年 5 月の質量の単位「キログラム」の定義改定が行われたことに関連して、日本国キログラム原器が、重要文化財の指定を受けました。詳細は、以下をご確認ください。

https://unit.aist.go.jp/nmij/info/kg_prototype/kg_prototype.html

なお、2019 年度の標準物質協議会の見学会（国立研究開発法人産業技術総合研究所　計量標準総合センター）では、すでに重要文化財に指定されていました“日本国メートル原器”を見学することができました。大変貴重な機会となりました。

２．標準物質協議会講演会

2021 年度の標準物質協議会の講演会を 2022 年 3 月 24 日に開催します。これまでと同様に当日の資料は、次号以降でご紹介予定です。

編集後記

またもや新型コロナウイルスと書き出してしまいましたが、なかなか収束の兆しが見えず、各方面での影響も深刻な部分があるようです。このような状況の中、標準物質協議会の講演会もオンライン開催となりました。

桜前線のニュースも聞こえてきましが、皆様いかがお過ごしでしょうか。

会報第 91 号をお届けいたします。

「計測標準と計量管理」誌から“不確かさ評価ノート”の一部を許可を得て転載しました。

信頼性の高い標準物質の供給及びその利用においては、不確かさの理解が必要不可欠となりますので、論文の内容が、具体的な不確かさ評価を行う上でも大いに役立つものと思います。

皆様方のご協力によりまして第 91 号を発行することができました。引き続き、皆様からのご寄稿をいただきたく、よろしくお願い申し上げます。

（四角目）

（ストック　埼玉県宮代町）

〒345-0043
埼玉県北葛飾郡杉戸町下高野 1600 番地
一般財団法人化学物質評価研究機構内
標準物質協議会 事務局　四角目和広
Tel. 0480-37-2601　Fax. 0480-37-2521
E-mail　shikakume-kazuhiro@ceri.jp